Forsøg til Exponential-Ligningers Almindelige Opløsning

ved

Niels Morville.

§. 1.

En Æqvation eller Ligning imellem bestemte og ubestemte Størrelser indeholder enten ubestemte Rodstørrelser (Radices) og bestemte Exponenter, hvilken Ligning kaldes bestemte Grads Ligning under den Form $x^m \pm Ax^n \pm$ &c. $= c$. Eller indeholder ubestemte Exponenter til bestemte Rodstørrelser, da Ligningen kaldes Exponential-Ligning under den Form $a^x \pm Ab^x \pm$ &c. $= c$ eller Ligningen indeholder tillige baade ubestemte Rodstørrelser med bestemte Exponenter saavelsom bestemte Rodstørrelser med ubestemte Exponenter under den Form $a^x \pm x = b$, som den simpleste eller almindelige Form $x^m \pm Aa^x = b$. Eller Ligningen indbefatter ubestemt Rodstørrelse med ubestemt Exponent under den Form $x^x = a$.

§. 2.

Da Exponenterne udi en Ligning kan enten være bestemte eller ubestemte, ere Exponential-Ligningerne for saa vidt modsatte mod bestemte Grads Ligninger, der have bestemte Exponenter, hvorudover de ei heller ligefrem paa samme Maade kan opløses, men udfordre en særskilt Opløsningsmaade.

§. 3.

§. 3.

Til Exponential-Ligningers Opløsning maae forudsættes bestemte Grads Ligningers Opløsning som bekiendt, da de ere ei det slags Ligninger, som indbefattes under Navn af Exponential-Ligninger, men ikke destomindre vil det være nødvendigt, at anføre de bestemte Grads Ligningers betydeligste hidtil bekiendte almindelige Opløsningsmaader, siden samme blive fornødne til Exponential-Ligningers Opløsning, hvorved jeg tillige maae bemerke: at de hidtil bekiendte Maader, at opløse bestemte Grads-Ligninger ere meget indskrænkede og tiene heiligen til Forbedring; i hvilken Henseende jeg til Slutning har udviklet en almindelig logaritmisk Approximations-Methode, der vil paa kortere og lettere Maade bestemme den ubestemte Rodstørrelse lige saa nøiagtigen, som nogen af følgende Approximations-Methoder.

§. 4.

De bestemte Grads Ligninger lade sig opløse paa følgende Maader:

Første Opløsnings-Maade.

Ved at bestemme Grændserne for Rodstørrelsen efter de bekiendte analytiske Methoder, dernæst udi Ligningen antage først den mindste Grændse-Størrelse som Rodstørrelse, og dermed forsøge, om den svarer til hele Ligningen, efter at den er reduceret til Nul, dernæst forøge den antagne Rodstørrelse efterhaanden med en Unitet, og dermed igientage samme Maade, indtil man har naaet den sande Rodstørrelse, der er den, som befindes at forvandle hele Ligningens Værdie til Nul. Naar Ligningens Værdie efter slig Beregningsmaade befindes at afvexle med + og — Tegn, falder den sande Rodstørrelse imellem begge.

Anden Opløsnings-Maade.

Efter at have bestemt den ubekiendte Rodstørrelses Grændsestørrelser, kan man og paa analytisk Maade søge den Størrelse, som enten skal tillægges

eller

eller fradrages en af de befundne Grændsestørrelser, paa det at Grændsestørrelsen ved Addition eller Subtraction skal forvandles til den sande Rodstørrelse; ved den analytiske Opløsningsmaade udelades de høiere Grader af den ubestemte Størrelse, hvis udfundne Værdie enten skal adderes eller subtraheres fra den antagne Rodstørrelse.

En kortere Approximations-Methode af samme Slags skal jeg tilføie, der saa vidt jeg veed, ei er bekiendt. Sæt, man har den Ligning $x^m + x = a$, hvis ubestemte Rodstørrelses Grændsestørrelse sættes $= b$, saa at $x = b + z$, da blir Ligningen $x^m + x = a$ at forvandle til den Ligningen $(b + z)^m + b + z = a$, og $(b + z)^m = a - b - z$, sæt $a - b = c$, altsaa $(b + z)^m = c - z$, og m Log. $(b + z)$ $=$ Log. $(c - z)$. Af Logaritme-Tavlerne vides den nærmeste logaritmiske Forskiel for Størrelsen (b), den jeg sætter $= r$; ligeledes vides den logaritmiske Forskiel for Størrelsen c, hvilken Forskiel sættes $= n$. Altsaa blir $1 : r = z : rz$, samt $1 : n = -z : -nz$ følgeligen m Log. $(b + z)$ $= m($Log. $(b) + rz) = mlb + mrz$; ligeledes Log. $(c - z) =$ Log. (c) $- nz$ og da m Log. $(b + z) =$ Log. $(c - z)$, blir $mlb + mrz$ $= lc - nz$, og $mrz = lc - mlb - nz$, samt $mrz + nz = lc - mlb$, og $(mr + n)\, z = lc - mlb$, samt $z = \frac{lc - mlb}{mr + n}$.

Exempel.

Sæt $a = 130$, $m = 3$, $b = 4$, $c = a - b = 126$.

$$\text{altsaa } z = \frac{2.100371 - 1.806180}{0.290730 + 0.003461} = \frac{0.294191}{0.294191} = 1$$

altsaa blir $x = b + z = 4 + 1 = 5$, som rigtigen svarer til Ligningen.

Tredie Opløsnings-Maade.

Euler har udi Anleitung zur Algebra §. 234, samt udi Analysis Infinitorum, udførligen forklaret følgende Methode, der best lader sig forstaae af et Exempel. Dersom den bestemte Grads Ligning er $x^3 - x^2 - 2x$ $- 1 = 0$. Antages $x = \frac{q}{p}$, $x^2 = \frac{r}{p}$, $x^3 = \frac{s}{p}$, forvandles Ligningen

ningen $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$ til $\frac{s}{p} - \frac{r}{p} - \frac{2q}{p} - 1 = 0$. altsaa $s = r + 2q + p$; som kaldes Sammenligningens Maalestok. Uden Forskiel antages de første Størrelser $r = 0$. $q = 0$. $p = 1$. hvilke siden immer forandre sine Værdier, eftersom man finder nye Værdier af (s), da ved benævnte Omsætning faaes

	$s = 0 + 0 + 1 = 1$	antages	$r = 0$	$q = 1$	$p = 1$
blir	$s = 0 + 2 + 1 = 3$	antages	$r = 1$	$q = 1$	$p = 3$
blir	$s = 1 + 2 + 3 = 6$	antages	$r = 1$	$q = 3$	$p = 6$
blir	$s = 1 + 6 + 6 = 13$	altsaa blir den hele Rad af befundne			

Størrelser 1 . . . 3 . . . 6 . . . 13 ꝛc. der paa samme Maade kan continueres, og da faaes $x = \frac{13}{6}$, som er Ligningens Rodstørrelse, der er Qvotienten af det sidst befundne Led dividert med det foregaaende, og jo længere man vedholder den Rads Beregning, des nøiere faaes Rodstørrelsen bestemt.

Fierde Opløsnings-Maade.

Sæt Ligningens almindelige Form rettet efter den Hensigt, hvortil den skal bruges til Exponential-Ligningers Opløsning. $x^a \pm \alpha x^{a-b} \pm$ ꝛc. $= c$; naar den differentieres blir $(ax^{a-1} \pm \alpha(a-b)x^{a-b-1})dx = 0$ ved at dividere med (dx) blir $ax^{a-1} \pm \alpha(a-b)x^{a-b-1} \pm$ ꝛc. $= 0$. da $x^a \pm \alpha x^{a-b} \pm$ ꝛc. $- c = 0$ i Følge foregaaende, antages en Grændse-størrelse af x, som ved Omsætning forvandler

$$\frac{x^a \pm \alpha x^{a-b} \pm \text{ꝛc.} - c}{ax^{a-1} \pm \alpha(a-b)x^{a-b-1} \pm \text{ꝛc.} - c} = m.$$

indføres Værdien af (m) istedet for (x), da blir den Ligning forvandlet til

$$\frac{m^a \pm \alpha m^{a-b} \pm \text{ꝛc.} - c}{am^{a-1} \pm \alpha(a-b)m^{a-b-1} \pm \text{ꝛc.} - c} = n$$

da Værdien af (n) blir bekiendt, eftersom Størrelserne a, b, α, m, c alle ere bekiendte, sættes videre istedet for (m) den Størrelse (m — n) da forvandles Formlen til

$$\frac{(m-n)^a \pm \alpha(m-n)^{a-b} - c}{a(m-n)^{a-1} \pm \alpha(a-b)\,(m-n)^{a-b-1} - c} = p$$

der ligeledes blir en bestemt Størrelse, eftersom a, b, c, α, m, n alle ere bestemte Størrelser. Paa ligedan Maade sættes (m — n — p) isteden for (m — n), da blir

$$\frac{(m-n-p)^a \pm \alpha(m-n-p)^{a-b} - c}{a(m-n-p)^{a-1} \pm \alpha(a-b)\,(m-n-p)^{a-b-1} - c} = q$$

der ligeledes er en bestemt Størrelse. Vedholdes saaledes bestandig paa samme Maade, findes Værdien af $x = m - n - p - q -$ ꝛc., da man paa den ringeste Brøk nær kan naae Værdien af Rodsterrelsen (x).

Exempel.

$$x^5 + 3x^4 = 80$$

saa er $\frac{x^5 + 3x^4 - 80}{5x^4 + 12x^3 - 80} = m.$ sæt $m = 2.$

da er $\frac{2^5 + 3 \cdot 2^4 - 80}{5 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 - 80} = n = 0.$

altsaa $x = 2 - 0 = 2.$

Havde man antagen $\frac{x^5 + 3x^4 - 80}{5x^4 + 12x^3 - 80} = 3 = m.$

da blev $\frac{3^5 + 3 \cdot 3^4 - 80}{5 \cdot 3^4 + 12 \cdot 3^3 - 80} = n = \frac{406}{649}.$

og ved ligedan Omsætning blev $p = \frac{78}{220}.$

altsaa $x = m - n - p$ ꝛc. $= 3 - \frac{406}{649} - \frac{78}{220}$ ꝛc.

Vil man have Rodsterrelsen nøiere bestemt, kan den arithmetiske Opløsningsmaade videre vedholdes.

§. 5.

§. 5.

Forinden jeg foretager Exponential-Ligningernes almindelige Opløsningsmaade, maae jeg deels bemerke nogle faa Tilfælde, hvori Exponential-Størrelser forekomme, og hvori deres Medforandrings-Love ere nødvendige, deels og bevise, at deres almindelige Opløsningsmaade, skiønt den er fornøden til mange Opgavers Opløsning, har hidtil været ubekiendt. Det blir umueligt at opregne alle de Tilfælde, hvori Exponential-Størrelser forekomme, og hvori deres Medforandrings-Love ere nødvendige; jeg vil derfor allene nævne nogle faa, uden at dermed vitløftigen opfylde denne liden Afhandling. Udi endeel Opgaver af dem, som angaae Rentes Renter, Tontiners- og Pensions-Cassers Beregning, indløbe Exponential-Størrelser, og kan ei undgaaes, at opløse Exponential-Ligninger. Udi adskillige Problemer af Artillerie-Videnskaben, saasom f. E. at bestemme en Canons største Ladnings-Vægt i Forhold til Kuglens Tyngde, ere Exponential-Ligninger uundgaaelige. Ved logaritmiske Opgavers Opløsning er Exponential-Ligningers Opløsning i mangfoldige Tilfælde uundværlig. Overalt udi de Tilfælde, hvortil man ei kan opdage nogen bestemt Medforandrings-Lov for de medforanderlige Størrelser, skal man befinde, at Exponential-Ligninger ere i Stand til at fremstille Nøglen til de allermest indviklede Opgavers Opløsning; til Beviis herpaa vil jeg allene anføre den Ligning $y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\,(e^{-x:31.682} - e^{-x:2.43114})$, som Professor Lambert har opdaget, hvorved forestilles Medforandrings-Loven for det af 10000 Menneskers Antal overlevende (y), efter visse Aars Forløb (x), samt bestemmes, hvor mange der af 10000 nyfødte døer Tid efter anden udi forskiellige Aldere.

§. 6.

At Exponential-Ligningers Opløsning har hidtil været ubekiendt bevidner de beste algebraiske Systemer og Haand-Bøger, som gaae ei videre med Exponential-Ligningers Opløsning, end til den simpleste Exponential-Ligning $a^x = b$. Man har endog anseet den samme Maade, som bruges til deslige Ligningers Opløsning, at være nødvendig til at bestemme den ubestemte Størrelse (x) udi de tvende Ligninger $x^x = a$ samt $x^{x+p} = b$, skiønt den ubestemte Rod og Exponent ligefrem kan bestemmes ved at dividere begge Ligningers Leed med hinanden, da man faaer $x^{x+p} : x^x = b : a$ altsaa $x^p = \frac{b}{a}$, og $x = \sqrt[p]{\frac{b}{a}}$, hvorved (x) bestemmes uden Hielp af Logaritmer. At begge Ligninger i øvrigt indeholde flere Bestemmelser, end udfordres til at fastsætte Værdien af (x) beviser de tvende Bestemmelser, som Ligningerne give, nemligen $x = \sqrt[p]{\frac{b}{a}} = \frac{b^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}$ og $x = \frac{pla}{lb - la}$, saa at der maae være den Ligning $\frac{b^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}} = \frac{pla}{lb - la}$ mellem (a) og (b), saafremt at Værdien af (x) skal kunde svare til begge Ligninger $x^x = a$ og $x^{x+p} = b$.

§. 7.

Vel har Euler viist Maaden at tilkiendegive en Exponential-Størrelse ved en uendelig Rad, der indeholder bekiendte Digniteter af den ubestemte Exponent, da, naar ved det Tegn (l) forstaaes hyperbolsk Logaritme, tilkiendegives en Exponential-Størrelse

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3(la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} +$$

men hverken har han opløst deslige Exponential-Ligninger, $a^x \pm b^x = c$ $a^x \pm Ab^x = c$ $a^x \pm Ab^x \pm Bc^x = d$ $a^x \pm Ab^x \pm Bc^x \pm Cd^x = e$, hvis almindelige Opløsning skal følge, ei heller kan deslige Ligninger opløses ved Hielp af anførte Rad, men den Opløsningsmaade, som skal blive forklaret, skulde snarere kunde tiene til at uddrage Rodstørrelsen af Summen af deslige uendelige Rader.

§. 8.

Af dette slags Exponential-Ligninger, som have bestemte Rodstørrelser med ubestemt Exponent, er den simpleste, som kun indbefatter et Exponential-Leed, under den Form $a^x = b$, hvis Opløsning er almindelig bekiendt, da $xla = lb$, og $x = \frac{lb}{la}$.

§. 9.

§. 9.

Naar Exponential-Ligningen indbefatter flere end et Exponential-Leed, er Opløsningen af en anden Beskaffenhed, saasom naar $a^x \pm b^x = c$ eller $a^x \pm Ab^x = c$, hvis Opløsning, saavidt jeg veed, ei endnu er bekiendtgiort; vilde man da sætte $a^x = u$, altsaa $c \mp b^x = u$, og efterhaanden antage forskiellige Værdier af (u), for deraf at bestemme de tvende Værdier, som x faaer af begge Ligninger $a^x = u$, samt $c \mp b^x = a^x = u$, kunde man endeligen naae en Værdie af (u), som gav eens Værdie til (x), saavel i Ligningen $a^x = u$, som i Ligningen $c \mp b^x = u$. Et Exempel paa den vidtløftige Maade at bestemme Værdien af (x) giver følgende Tabelle; hvor $a = 2 \,.\, b = 4 \,.\, c = 72$.

Hoved-Ligningen $a^x + b^x = c$.

De Hypothetiske Værdier af $a^x = u$	De Værdier (x) faae af Ligningen $a^x = u$	De Værdier (x) faae af Ligningen $c - b^x = u$
$a^x = u = 1$	$x = 0$	$x = \frac{l71}{l4} = \frac{1851}{602}$
$a^x = 2$	$x = 1$	$x = \frac{l70}{l4} = \frac{1845}{602}$
$a^x = 3$	$x = \frac{l3}{l2} = \frac{4771}{3010}$	$x = \frac{l69}{l4} = \frac{1838}{602}$
$a^x = 4$	$x = \frac{l4}{l2} = \frac{6020}{3010}$	$x = \frac{l68}{l4} = \frac{1832}{602}$
$a^x = 5$	$x = \frac{l5}{l2} = \frac{6989}{3010}$	$x = \frac{l67}{l4} = \frac{1826}{602}$
$a^x = 6$	$x = \frac{l6}{l2} = \frac{7781}{3010}$	$x = \frac{l66}{l4} = \frac{1819}{602}$
$a^x = 7$	$x = \frac{l7}{l2} = \frac{8450}{3010}$	$x = \frac{l65}{l4} = \frac{1812}{602}$
$a^x = 8$	$x = \frac{l8}{l2} = \frac{9030}{3010} = 3$	$x = \frac{l64}{l4} = \frac{1806}{602} = 3$
$a^x = 9$	$x = \frac{l9}{l2} = \frac{9542}{3010}$	$x = \frac{l63}{l4} = \frac{1799}{602}$

Hvoraf sluttes, at udi Ligningen $a^x + b^x = c$ er $x = 3$, da (x) faaer ens Værdie, saavel af Ligningen $a^x = u$, som $c - b^x = u$, naar (u) antages $= 8$. Men da denne Methode vilde blive alt for vidtløftig, om den endog ved den ubekiendtes Grændsestørrelses Bestemmelse samt ved Hielp af Regula Falsi blev forkortet, er det fornødent at søge Gienvei til deslige Ligningers Opløsning paa følgende Maade:

$$a^x \pm b^x = c.$$

Sæt $a^x = u.\quad b^x = v.$

saa at $u \pm v = c.$

blir $xla = lu.\quad xlb = lv.$

$$xla : xlb = lu : lv.$$

$$la : lb = lu : lv.$$

$$lv \times \frac{la}{lb} = lu.$$

altsaa $v^{\frac{la}{lb}} = u.$

men $u \pm v = c.$

altsaa blir $v^{\frac{la}{lb}} \pm v = c.$

Eller og paa denne Maade:

Sæt $b = a^z$, da bliver $lb = zla.$

altsaa $\frac{lb}{la} = z$, men $b = a^z$,

følgeligen $a^{\frac{lb}{la}} = b.$ og da $a^x \pm b^x = c$,

blir $a^x \pm a^{\left(\frac{lb}{la}\right)x} = c$, sættes $a^x = u$,

blir $u \pm u^{\frac{lb}{la}} = c.$

Saavel af forhen fundne Ligning $v^{\frac{la}{lb}} \pm v = c$, kan ved en af de §. 4. forklarede Maader Rodstørrelsen (v) bestemmes der sættes $= m$, som og af

Lignin-

Ligningen $u \pm u^{\frac{lb}{la}} = c$ Rodstørrelsen (u) fastsættes, og da $a^x \pm b^x = c$, men $v = b^x = m$. Blir $a^x \pm m = c$ og $xla =$ Log. $(c \mp m) =$ Log. p. Altsaa $x = \frac{\text{Log. p}}{\text{Log. a}}$, eller og, om Rodstørrelsen af Ligningen $u \pm u^{\frac{lb}{la}} = c$ sættes $= m'$, da blir $m' \pm b^x = c$, og $\pm b^x = c - m'$, altsaa $xlb =$ Log. $(c \mp m')$ og $x = \frac{\text{Log. } c \mp m'}{\text{Log. b}}$.

Exempel.

Sæt $a = 2$. $b = 4$. $c = 72$.
da blir $\frac{la}{lb} = \frac{301}{602} = \frac{1}{2}$, altsaa blir

$v^{\frac{1}{2}} + v = 72$, og $v = [\sqrt{(72 + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2}]^2 = m$, følgeligen $v = 64$, altsaa efter foranførte Opløsningsmaade $x = \frac{\text{Log. } (72 - 64)}{\text{Log. } 2} = \frac{903}{301} = 3$. Efter anden Opløsningsmaade bliver Værdien af $x = \frac{\text{Log } (72 - \frac{17}{4})}{\text{Log. } 4} = 3$.

§. 10.

Dersom Exponential-Ligningen har en Coefficient, blir Opløsningsmaaden ligefuldt anvendelig. Sæt at Ligningen forestilles ved $a^x \pm Ab^x = c$, sættes som forhen $b = a^z$, blir $lb = zla$ og $\frac{lb}{la} = z$, altsaa $b = a^{\frac{lb}{la}}$, følgeligen ved Omsætning $a^x \pm Aa^{x\left(\frac{lb}{la}\right)} = c$, sættes $a^x = u$, blir $u \pm Au^{\frac{lb}{la}} = c$, hvoraf Rodstørrelsen (u) kan efter en af foranførte Methoder (§ 4) bestemmes, naar da $u = p$ er bestemt, blir $a^x = p$ altsaa $xla = lp$ og $x = \frac{lp}{la}$.

Anmerk-

Anmerkning.

Der ere de Tilfælder, hvori man til at forkorte Ligningernes $v^{\frac{la}{lb}} \pm v = c$ og $u \pm Au^{\frac{lb}{la}} = c$ Opløsning kan benytte sig af den analytiske Sætning: at, naar (e) er det Tal, hvis hyperbolske Logaritme $= 1$ saa er, naar $\frac{la}{lb}$ er meget liden, eller (lb) stor i Forhold til (Log. a); $e^{\frac{la}{lb}} = 1 + \frac{la}{lb}$. Naar da (v) antages til Logaritme-Systemets Basis, og $\frac{la}{lb} < 1$, saa er $v^{\frac{la}{lb}} = 1 + \frac{la}{lb}$.

§. 11.

Naar Exponential-Ligningen bestaaer af trende Exponential-Leed, er Opløsningen følgende:

$$\text{Ligningen er } a^x \pm b^x \pm c^x = d.$$
$$\text{sæt } b = a^u. \quad c = a^v.$$
$$\text{altsaa } lb = ula. \quad lc = vla.$$
$$\text{og } \frac{lb}{la} = u. \quad \text{samt } \frac{lc}{la} = v.$$
$$\text{men } b = a^u. \quad c = a^v.$$
$$\text{altsaa } a^{\frac{lb}{la}} = b. \quad a^{\frac{lc}{la}} = c.$$
$$\text{og da } a^x \pm b^x \pm c^x = d, \text{ blir } a^x \pm a^{x\left(\frac{lb}{la}\right)} \pm a^{x\left(\frac{lc}{la}\right)} = d.$$
$$\text{sæt } a^x = y, \text{ saa blir } y \pm y^{\frac{lb}{la}} \pm y^{\frac{lc}{la}} = d,$$

da man ved Hielp af en af foranførte Methoder kan efter §. 4. bestemme denne Lignings Rodstørrelse (y), sættes samme $= p'$, altsaa $a^x = p'$, og $xla = lp'$, samt $x = \frac{\text{Log. } p'}{\text{Log. } a}$. Dersom Ligningen har Coefficienter under den Form $a^x \pm Ab^x \pm Bc^x = d$, blir den forvandlede Ligning

$y \pm$

$y \pm Ay^{\frac{lb}{la}} \pm By^{\frac{lc}{la}} = d$, der overalt har bestemte Exponenter, og opløses paa samme Maade, som forrige Ligning.

§. 12.

Dersom Exponential-Ligningen bestaaer af 4re Exponential-Leed under den Form

$$a^x \pm b^x \pm c^x \pm d^x = e.$$

sættes $b = a^u$. $c = a^v$. $d = a^z$.

altsaa $lb = ula$. $lc = vla$. $ld = zla$.

$\frac{lb}{la} = u$. $\frac{lc}{la} = v$. $\frac{ld}{la} = z$.

men $b = a^u$. $c = a^v$. $d = a^z$.

altsaa $b = a^{\frac{lb}{la}}$. $c = a^{\frac{lc}{la}}$. $d = a^{\frac{ld}{la}}$.

men $a^x \pm b^x \pm c^x \pm d^x = e$.

altsaa $a^x \pm a^x\left(\frac{lb}{la}\right) \pm a^x\left(\frac{lc}{la}\right) \pm a^x\left(\frac{ld}{la}\right) = e$.

sættes $a^x = y$.

blir $y \pm y^{\frac{lb}{la}} \pm y^{\frac{lc}{la}} \pm y^{\frac{ld}{la}} = e$.

naar denne Ligning, som har bestemte Exponenter, opløses efter en af foranførte Opløsnings-Maader, bestemmes Værdien af $y = p''$, og da $a^x = y = p''$ blir $xla = lp''$, og $x = \frac{\text{Log. } p''}{\text{Log. } a}$.

§. 13.

Saafremt at Ligningen havde Coefficienter under den Form $a^x \pm Ab^x \pm Bc^x \pm Cd^x = e$, blev den forvandlede Ligning $y \pm Ay^{\frac{lb}{la}} \pm By^{\frac{lc}{la}} \pm Cy^{\frac{ld}{la}} = e$, hvor mange Leed Exponential-Ligningen end bestaaer af, kan den dog opløses paa anførte almindelige Maade, ved at forvandle den til en Ligning, som overalt har bekiendte Exponenter. En anden Nærmelses-Methode at opløse deslige Ligninger skal i følgende blive viist, naar de i slig Henseende fornødne Forudsætninger ere blevne forklarede.

§. 14.

Ved Hielp af anførte Methoder kan man efter de derved bestemte Formler fastsætte den ubestemte Værdie udi følgende Ligninger:

$$a^{x \pm m} + b^{x \pm m} = c.$$

hvoraf man efter (§. 9.) bestemmer $x \pm m = \frac{lp}{la}$;

altsaa $x = \frac{lp}{la} \mp m$. Ligeledes blir udi Ligningen

$$a^{x \pm m} + b^{x \pm m} + c^{x \pm m} = d$$

$x \pm m = \frac{lp'}{la}$ og $x = \frac{lp'}{la} \mp m$; udi Ligningen

$$a^{x \pm m} + b^{x \pm m} + c^{x \pm m} + d^{x \pm m} = e.$$

blir $x \pm m = \frac{lp''}{la}$, altsaa $x = \frac{lp''}{la} \mp m$.

§. 15.

Udi Ligningen $a^{nx \pm m} + b^{nx \pm m} = c$, blir $nx \pm m = \frac{lp}{la}$ altsaa $nx = \frac{lp}{la} \mp m$, og følgeligen $x = (\frac{lp}{la} \mp m) : n = \frac{lp \mp mla}{nla}$; udi Ligningen $a^{nx \pm m} + b^{nx \pm m} + c^{nx \pm m} = d$, blir efter den almindelige Opløsnings-Maade Værdien af $nx \pm m = \frac{lp'}{la}$, og $x = \frac{lp' \mp mla}{nla}$. Udi Ligningen $a^{nx \pm m} + b^{nx \pm m} + c^{nx \pm m} \pm d^{nx \pm m} = e$, blir $nx \pm m = \frac{lp''}{la}$ og altsaa $x = \frac{lp'' \mp mla}{nla}$.

§. 16.

§. 16.

Ligeledes kan (x) bestemmes udi Ligningerne $a^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} \pm b^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} = c$, hvori $\frac{mx \pm r}{nx \pm s} = \frac{lp}{la}$, altsaa $mxla \pm rla = nxlp \pm slp$, og $mxla - nxlp = \pm slp \mp rla$ og $x = \frac{\pm slp \mp rla}{mla - nlp}$. Paa ligedan Maade bestemmes af Ligningen $a^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} \pm b^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} \pm c^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} = d$ $x = \frac{\pm slp' \mp rla}{mla - nlp'}$, og af Ligningen $a^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} \pm b^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} \pm c^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} \pm d^{\frac{mx \pm r}{nx \pm s}} = e$ bestemmes $x = \frac{\pm slp'' \mp rla}{mla - nlp''}$. Alt i Overeensstemmelse med forhen udviklede almindelige Opløsnings-Maade.

§. 17.

Man kan og ved Hielp af den almindelige Opløsnings-Maade bestemme Værdien af den ubestemte Rodstørrelse udi Ligningen $a^{x^n} \pm b^{x^n} = c$, hvoraf man ved den almindelige Formel (§. 9.) bestemmer $x^n = \frac{lp}{la}$ altsaa $lx = \text{Log.} \left(\frac{lp}{la}\right) : n$. Udi Ligningen $a^{x^n} \pm b^{x^n} \pm c^{x^n} = d$ blir $lx = \text{Log.} \left(\frac{lp'}{la}\right) : n$. Udi Ligningen $a^{x^n} \pm b^{x^n} \pm c^{x^n} \pm d^{x^n} = e$ blir $lx = \text{Log.} \left(\frac{lp''}{la}\right) : n$; alt efter forhen udviklede almindelige Opløsnings-Maader (§§. 9. 11. 12.), omendskiønt anførte Ligningers Exponential-Leed have bekiendte Coefficienter, gielder dog den almindelige Opløsnings-Maade, hvorved slig en Ligning $a^{x^n} \pm Ab^{x^n} \pm Bc^{x^n} \pm Cd^{x^n} = e$ blir opløselig.

§. 18.

Ligeledes kan man og ved samme almindelige Opløsnings-Maade bestemme Værdien af den ubekiendte Størrelse udi Ligningen $a^{x^n \pm mx} \pm b^{x^n \pm mx} = c$, da $x^n \pm mx = \frac{lp}{la}$ og Rodstørrelsen (x) efter en af forhen forklarte Maade (§. 4.) kan bestemmes. Paa ligedan Maade bestemmes den ubestemte Størrelse udi Ligningerne $a^{x^n \pm mx} \pm b^{x^n \pm mx} \pm c^{x^n \pm mx} = d$ samt $a^{x^n \pm mx} \pm b^{x^n \pm mx} \pm c^{x^n \pm mx} \pm d^{x^n \pm mx} = e$.

§. 19.

Efter samme almindelige Opløsnings-Maade kan man og bestemme den ubestemte Størrelse i følgende Ligning $a^{m^x} \pm b^{m^x} = c$; da man efter den almindelig Formel (§. 9.) befinder Værdien af $a^{m^x} = p$, altsaa $m^x \, la = lp$, og $m^x = \frac{lp}{la}$, og $x lm = \text{Log.} \left(\frac{lp}{la}\right)$ samt $x = \text{Log.} \left(\frac{lp}{la}\right) : lm$. Paa ligedan Maade bestemmes den ubestemte Størrelse udi Ligningen $a^{m^x} \pm b^{m^x} \pm c^{m^x} = d$, da $x = \text{Log.} \left(\frac{lp'}{la}\right) : lm$, og udi Ligningen $a^{m^x} \pm b^{m^x} \pm c^{m^x} \pm d^{m^x} = e$, da man faaer $x = \text{Log.} \left(\frac{lp''}{la}\right) : \text{Log.}\, m$.

Exempel.

Sæt at udi Ligningen $a^{m^x} \pm b^{m^x} = c$ er

$$m = 9. \quad a = 2. \quad b = 4. \quad c = 72.$$

da blir efter den (§. 9.) forklarede almindelige Opløsnings-Maade $v = 64$ $c - v = 8 = p$; altsaa $x = \text{Log.} \left(\frac{lp}{la}\right) : \text{Log.}\, m = \text{Log.} \left(\frac{0.903}{0.301}\right) : 0.954 = \text{Log.}\, 3 : 0.954 = 0.477 : 0.954 = \frac{1}{2}$.

Forsøges dermed udi Ligningen $a^{m^x} \pm b^{m^x} = c$, skal man befinde $2^{9^{\frac{1}{2}}} + 4^{9^{\frac{1}{2}}}$ eller $2^3 + 4^3 = 72$.

§. 20.

Ved Hielp af den forklarte almindelige Opløsnings-Maade (§. 9.) kan man og opløse de Ligninger, som have imaginaire eller forstilte Exponenter. Dersom $a^{x\sqrt{-1}} \pm b^{x\sqrt{-1}} = c\sqrt{-1}$, blir $x\sqrt{-1} = \frac{lp}{la} = \frac{\text{Log.}\,(c\sqrt{-1}-m)}{\text{Log. }a}$ hvorudi (m) tilkiendegiver Rodstørrelsen udi den Ligning $v^{\frac{la}{lb}} \pm v = c\sqrt{-1}$, da $v = b^{x\sqrt{-1}}$. Vil man herpaa videre anvende de af Euler udi Histoire de l'Academie Royale des Sciences & belles Lettres de Berlin anførte Methoder, at bestemme det Tal, som svarer til en imaginair Logaritme, saavelsom at finde den hyperbolske Logaritme, som svarer til en imaginair eller forstilt Størrelse, da beviser han, at naar den imaginaire Logaritme er $= a + b\sqrt{-1}$, og Tallet, som svarer til samme, sættes $= x + y\sqrt{-1}$, findes $a + b\sqrt{-1}$ at svare til det Tal $e^a\,(\text{Cos. } b + \sqrt{-1}.\ \text{Sin. } b)$ hvori (e) er det Tal, hvis hyperbolske Logaritme $= 1$. Ligeledes, naar det imaginaire Tal er given, findes dets behørige hyperbolske Logaritme, da naar det imaginaire Tal er $a + b\sqrt{-1}$, og Logaritmen sættes $= x + y\sqrt{-1}$, blir efter Eulers Beviis $\text{Log.}\,(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1} = \text{Log.}\,(\sqrt{a^2+b^2}) + \sqrt{-1}.\ A\ \text{Sin.}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, hvor A tilkiendegiver den Bue, hvis Sinus er $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Ved Anvendelsen af disse Sætninger vil man med Nytte kunde forvandle imaginair Exponential-Størrelse til fordeelagtigere Form. Samme kan og anvendes paa Ligningerne $a^{x\sqrt{-1}} \pm b^{x\sqrt{-1}} \pm c^{x\sqrt{-1}} = d\sqrt{-1}$ samt $a^{x\sqrt{-1}} \pm b^{x\sqrt{-1}} \pm c^{x\sqrt{-1}} \pm d^{x\sqrt{-1}} = e\sqrt{-1}$. Saavel som og paa Ligningerne $a^{x^{\sqrt{-1}}} \pm b^{x^{\sqrt{-1}}} = c\sqrt{-1}$ samt $a^{x^{\sqrt{-1}}} \pm b^{x^{\sqrt{-1}}} \pm c^{x^{\sqrt{-1}}} = d\sqrt{-1}$ og $a^{x^{\sqrt{-1}}} \pm b^{x^{\sqrt{-1}}} \pm c^{x^{\sqrt{-1}}} \pm d^{x^{\sqrt{-1}}} = e\sqrt{-1}$; hvoraf den første $a^{x^{\sqrt{-1}}} \pm b^{x^{\sqrt{-1}}} = c\sqrt{-1}$ gir efter Methoden § 9, ved at sætte $b^{x\sqrt{-1}} = v$, da $v^{\frac{la}{lb}} \pm v = c\sqrt{-1}$, hvoraf v bestemmes $= p\sqrt{-1}$ samt $x^{\sqrt{-1}}\,lb = l(p\sqrt{-1})$ og $x^{\sqrt{-1}} = \frac{l(p\sqrt{-1})}{lb}$ samt $\sqrt{-1} \times \text{Log.}\, x = \text{Log.}\left(\frac{l(p\sqrt{-1})}{lb}\right)$ altsaa $lx = \text{Log.}\left(\frac{lp\sqrt{-1}}{lb}\right) : \sqrt{-1}$, paa ligedan Maade opløses de øvrige.

§. 21.

Dersom Exponential-Ligningen har ubestemt Sinus, Cosinus, Tangent, Cotangent eller Secant til Exponent, kan den almindelig Opløsningsmaade og tiene til at bestemme Værdien af de ubestemte Exponenter. Udi Ligningen $a^{\text{Sin.}\,x} \pm b^{\text{Sin.}\,x} = c$ blir $\text{Sin.}\,x = \frac{\text{Log.}\,p}{\text{Log.}\,a}$; er $a^{\text{Sin.}\,x} \pm b^{\text{Sin.}\,x} \pm c^{\text{Sin.}\,x} = d$, blir $\text{Sin.}\,x = \frac{lp'}{la}$; er $a^{\text{Sin.}\,x} \pm b^{\text{Sin.}\,x} \pm c^{\text{Sin.}\,x} \pm d^{\text{Sin.}\,x} = e$, blir $\text{Sin.}\,x = \frac{lp''}{la}$, alt i Følge §. 9. 11. 12.

§. 22.

Ligeledes naar $a^{\text{Cos.}\,x} \pm b^{\text{Cos.}\,x} = c$, blir $\text{Cos.}\,x = \frac{lp}{la}$, er $a^{\text{Cos.}\,x} \pm b^{\text{Cos.}\,x} \pm c^{\text{Cos.}\,x} = d$, blir $\text{Cos.}\,x = \frac{lp'}{la}$. Dersom $a^{\text{Cos.}\,x} \pm b^{\text{Cos.}\,x} \pm c^{\text{Cos.}\,x} \pm d^{\text{Cos.}\,x} = e$, blir $\text{Cos.}\,x = \frac{lp''}{la}$.

§. 23.

Ligningen $a^{\text{Tang.}\,x} \pm b^{\text{Tang.}\,x} = c$ gir $\text{Tang.}\,x = \frac{lp}{la}$, og $a^{\text{Tang.}\,x} \pm b^{\text{Tang.}\,x} \pm c^{\text{Tang.}\,x} = d$ gir $\text{Tang.}\,x = \frac{lp'}{la}$, samt Ligningen $a^{\text{Tang.}\,x} \pm b^{\text{Tang.}\,x} \pm c^{\text{Tang.}\,x} \pm d^{\text{Tang.}\,x} = e$ gir $\text{Tang}\,x = \frac{lp}{la}$.

§. 24.

§. 24.

Dersom $a^{\text{Cot. } x} \pm b^{\text{Cot. } x} = c$, blir Cot. $x = \frac{lp}{la}$, er $a^{\text{Cot. } x} \pm b^{\text{Cot. } x} \pm c^{\text{Cot. } x} = d$, blir Cot. $x = \frac{lp'}{la}$; er $a^{\text{Cot. } x} \pm b^{\text{Cot. } x} \pm c^{\text{Cot. } x} \pm d^{\text{Cot. } x} = e$, blir Cot. $x = \frac{lp''}{la}$, alt efter de almindelige Opløsningsmaader §. 9. 11. 12. ved at giøre de fornødne Substitutioner.

§. 25.

De Exponential-Ligninger, som have ubestemte logaritmiske Exponenter, kan og opløses ved Hielp af de forhen forklarte almindelige Opløsningsmaader. Dersom $a^{lx} \pm b^{lx} = c$ blir $lx = \frac{l(c-m)}{la}$ (§. 4.) hvor (l) overalt har Logaritme Bemerkelse; Ligningen $a^{lx} \pm b^{lx} \pm c^{lx} = d$ gir $lx = \frac{lp'}{la}$, Ligningen $a^{lx} \pm b^{lx} \pm c^{lx} \pm d^{lx} = e$ gir $lx = \frac{lp''}{la}$. Den samme Opløsnings-Maade gielder og, naar Exponential-Ledene har bestemte Coefficienter.

§. 26.

Fremdeles kan og den almindelige Opløsningsmaade anvendes paa at bestemme den ubestemte Størrelse udi følgende logaritmiske Exponential-Ligninger: Dersom $a^{\text{Log. } (x \pm m)} \pm b^{\text{Log. } (x \pm m)} = c$, blir Log. $(x \pm m) = lr$, naar $\frac{lp}{la}$ sættes $= lr$, altsaa $x = r \mp m$. Ligeledes kan man bestemme de ubestemte Størrelser udi Ligningerne $a^{\text{Log. } (x \pm m)} \pm b^{\text{Log. } (x \pm m)} \pm c^{\text{Log. } (x \pm m)} = d$, samt $a^{\text{Log. } (x \pm m)} \pm b^{\text{Log. } (x \pm m)} \pm c^{\text{Log. } (x \pm m)} \pm d^{\text{Log. } (x \pm m)} = e$. Paa ligedan Maade bestemmes og (x) udi Ligningen $a^{\text{Log. } (nx \pm m)} \pm b^{\text{Log. } (nx \pm m)} = c$, da Log. $(nx \pm m) = \frac{lp}{la} = lr$, og $nx \pm m = r$, altsaa $x = \frac{r \mp m}{n}$. Ligeledes bestemmes og Værdien af (x) udi Ligningen $a^{\text{Log. } (nx \pm m)} \pm b^{\text{Log. } (nx \pm m)} \pm c^{\text{Log. } (nx \pm m)}$ &c. $= d$.

§. 27.

§. 27.

Ligedan Opløsnings-Maade gielder og for Ligningerne $a^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} \pm b^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} = c$, da man faaer $\text{Log.}\frac{nx \pm m}{x} = \frac{lp}{la} = lr$, og $\frac{nx \pm m}{x} = r$, (§. 9.) altsaa $nx \pm m = rx$, og $x = \frac{\pm m}{r - n}$. Og $a^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} \pm b^{\text{Log.}\frac{nx \pm m}{x}} \pm c^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} = d$, samt $a^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} \pm b^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} \pm c^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} \pm d^{\text{Log.}\frac{(nx \pm m)}{x}} = e$.

§. 28.

Efter den forklarte almindelige Opløsnings-Maade kan man og bestemme den ubestemte udi Ligningen $a^{\text{Log.}(x^n \pm mx)} \pm b^{\text{Log.}(x^n \pm mx)} = c$, da i Følge (§. 9.) $\text{Log.}(x^n \pm mx) = \frac{lp}{la} = lr$, altsaa $x^n \pm mx = r$, hvoraf Rodstørrelsen (x) bestemmes efter en (§. 4.) anført Opløsningsmaade. Af samme Beskaffenhed er Ligningen $a^{\text{Log.}(x^n \pm mx)} \pm b^{\text{Log.}(x^n \pm mx)} \pm c^{\text{Log.}(x^n \pm mx)} \pm$ &c. $= d$. Hvad Function Exponenten end er af (x), kan dog Værdien af (x) bestemmes ved Anvendelse af den forhen forklarte almindelige Opløsningsmaade.

§. 29.

Et endnu mere besynderligt Slags Ligninger ere de, som har ubestemt Logaritme af høiere Orden til Exponent. Der gives Logaritmer af forskillig Orden; de af første Orden ere Logaritmer til naturlige Tal, de af anden Orden ere Logaritmer af Konst-Tal eller Logaritme-Tal; de af tredie Orden ere Logaritmer af Logaritme-Tal af anden Orden o. s. v. Saaledes er Log. x eller lx Logaritme af 1ste Orden; llx Logaritme af 2den Orden; lllx Logaritme af 3die Orden o. s. v. Dersom $x = 10000$ er $lx = 4$,

llx

$llx = 0.602060$, og $lllx = -0.220404$. Derimod blir $llllx$ eller l^4x = en imaginair eller forstilt Størrelse, saasom det blir Logaritmen af en negativ Størrelse. Ved Hielp af de almindelige Opløsnings-Maader (§. 9) o. s. kan man opløse logaritmiske Exponential-Ligninger, som ere af høiere Orden. Dersom $a^{llx} \pm b^{llx} = c$, blir efter (§. 9.) $llx = \frac{lp}{la}$, som sættes $= lr$, altsaa $lx = r$. Dersom $a^{llx} \pm b^{llx} \pm c^{llx} = d$, blir efter §. 11. $llx = \frac{lp'}{la} = lr'$, og $lx = r'$; er $a^{llx} \pm b^{llx} \pm c^{llx} \pm d^{llx} = e$, blir i Følge (§. 12.) $llx = \frac{lp''}{la} = lr''$, og $lx = r''$. Dersom den ubestemte logaritmiske Exponent befandtes endnu af høiere Orden f. E. $lllx$ eller $l^n x$, kunde man ikke desto mindre anvende samme Opløsningsmaade, saafremt $l^n x$ ei er af saa høi en Orden, at den blir en imaginair eller forstilt Størrelse, i saa Fald beviser det tillige, at Opgaven, som svarer til den Ligning, er uopløselig.

§. 30.

De almindelige Opløsningsmaader (§. 9. 11. 12.) kan og tiene til at bestemme den ubestemte Størrelse i Tilfælde, da den ubestemte Exponent er Logaritme af Sinus, Cosinus, Tangent eller Cotangent til en ubestemt Vinkel. Naar da $a^{\text{Log. Sin. } x} \pm b^{\text{Log. Sin. } x} = c$, blir i Følge foregaaende Log. Sin. x $= \frac{lp}{la} = lr$ (§. 9.), altsaa Sin. $x = r$. Paa ligedan Maade tiener den almindelige Opløsning til at bestemme Sinus af (x) udi Ligningen $a^{\text{Log. Sin. } x} \pm b^{\text{Log. Sin. } x} \pm c^{\text{Log. Sin. } x} = d$, samt udi Ligningen $a^{\text{Log. Sin. } x} \pm b^{\text{Log. Sin. } x} \pm c^{\text{Log. Sin. } x} \pm d^{\text{Log. Sin. } x}$ 2c. $= e$.

§. 31.

Dersom $a^{\text{Log. Cos. } x} \pm b^{\text{Log. Cos. } x} = c$, blir, naar $\frac{lp}{la} = lr$, Cos. $x = r$. Ligedan bestemmes Værdien af Cos. x udi Ligningen $a^{\text{Log. Cos. } x} \pm b^{\text{Log. Cos. } x} \pm c^{\text{Log. Cos. } x} = d$, samt udi Ligningen $a^{\text{Log. Cos. } x} \pm b^{\text{Log. Cos. } x} \pm c^{\text{Log. Cos. } x} \pm d^{\text{Log. Cos. } x} \pm$ 2c. $= e$.

§. 32.

Udi Ligningen $a^{\text{Log. Tang. } x} \pm b^{\text{Log. Tang. } x} = c$ blir paa samme Maade ved den fornødne Omsætning Tang. $x = r$, naar $\frac{lp}{la} = lr$; ligeledes bestemmes Værdien af Tang. x udi Ligningerne $a^{\text{Log. Tang. } x} \pm b^{\text{Log. Tang. } x} \pm c^{\text{Log. Tang. } x} = d$, samt $a^{\text{Log. Tang. } x} \pm b^{\text{Log. Tang. } x} \pm c^{\text{Log. Tang. } x} \pm d^{\text{Log. Tang. } x} = e$.

§. 33.

Paa liget an Maade bestemmes Værdien af Cotangenten til (x) udi Ligningerne $a^{\text{Log. Cot. } x} \pm b^{\text{Log. Cot. } x} = c$, og $a^{\text{Log. Cot. } x} \pm b^{\text{Log. Cot. } x} \pm c^{\text{Log. Cot. } x} = d$, samt $a^{\text{Log. Cot. } x} \pm b^{\text{Log. Cot. } x} \pm c^{\text{Log. Cot. } x} \pm d^{\text{Log. Cot. } x} = e$.

§. 34.

Ved de almindelige Opløsningsmaader §. 9. 11. 12. veiledes jeg til at opløse følgende Ligninger $mb^x + na^x = ca^x b^x$, saavelsom $mb^x . c^x \pm na^x . c^x \pm ra^x . b^x = a^x . b^x . c^x . d$; samt $mb^x . c^x . d^x \pm na^x . c^x . d^x \pm ra^x . b^x . d^x \pm sa^x . b^x . c^x = e . a^x . b^x . c^x . d^x$. Den første af disse Ligninger $mb^x \pm na^x = ca^x . b^x$ opløses paa følgende Maade: Ved Division blir $\frac{mb^x}{a^x} \pm n = c . b^x$, og $\frac{m}{a^x} \pm \frac{n}{b^x} = c$, altsaa blir $ma^{-x} \pm n . b^{-x} = c$; sættes da udi Formeln (§. 9.) i Stedet for (x) den negative Størrelse $(-x)$, blir $-x = \frac{lp}{la}$, altsaa, naar $\frac{lp}{la} = lr$ blir $-x = lr$, og $x = -lr$, følgeligen $x = \text{Log.} \left(\frac{1}{r}\right)$.

§. 35.

Ligningen $mb^x . c^x \pm na^x . c^x \pm r . a^x . b^x = a^x . b^x . c^x . d$ forvandles ved Division til $\frac{m}{a^x} \pm \frac{n}{b^x} \pm \frac{r}{c^x} = d$, altsaa $ma^{-x} \pm$

nb

$nb^{-x} \pm rc^{-x} = d$ og $a^{-x} \pm \frac{n}{m} b^{-x} \pm \frac{r}{m} c^{-x} = \frac{d}{m}$, da man efter Opløsnings-Maaden (§. 11.), hvor $y \pm Ay^{\frac{lb}{la}} \pm By^{\frac{lc}{la}} = d$, faaer $y \pm \frac{n}{m} y^{\frac{lb}{la}} \pm \frac{r}{m} y^{\frac{lc}{la}} = \frac{d}{m}$, hvis Rodstørrelse bestemt (§. 4) $= p'$ gir $y = p' = a^{-x}$, følgeligen Log. $p' = -xla$, altsaa $x = \frac{-lp'}{la} = -lq$, og $x =$ Log. $\frac{1}{q}$. Ligedan fastsættes den ubestemte Exponent udi Ligningen $mb^x \cdot c^x \cdot d^x \pm n \cdot a^x \cdot c^x \cdot d^x \pm r \cdot a^x \cdot b^x \cdot d^x \pm s \cdot a^x \cdot b^x \cdot c^x = e \cdot a^x \cdot b^x \cdot c^x \cdot d^x$ ved at anvende den forhen (§. 12.) forklarte almindelige Opløsningsmaade.

Anmerkning.

Disse Ligningers Opløsning kan have sin Nytte ved adskillige indviklede Differential-Ligningers Integration, da Exponential-Størrelserne derved kan forvandles til en beqvemmere Integrabilitets-Form.

§. 39.

Da jeg har udviklet Maaden at opløse de slags Exponential-Ligninger, som kan forestilles under den almindelige Form $a^x \pm Ab^x \pm$ &c. $= e$, maae jeg tillige giøre Forsøg paa at opløse de øvrige slags Exponential-Ligninger, der udfordre en anden Opløsningsmaade, og ei uden Nærmelse eller Approximation kan bestemme den ubestemte Størrelse. Hertil er følgende Forudsætning fornøden: Log. $\frac{x}{y} = \frac{x-y}{y}$, saafremt der forstaaes den hyperbolske Logaritme, og x er mindre end y, samt enten nær ved at være lige saa stor som y, eller og overmaade liden i Forhold til y, saa at y er overmaade stor i Forhold til x. Denne Sats har Euler brugt udi sine analytiske Meditationer, men, naar den ei anvendes inden anførte Grændser, vil den medføre Følger af Brøks Feil udi Exponential-Ligningers ubestemte Størrelses Fastsættelse. Da jeg ei har forefunden Satsen beviist, vil jeg undersøge sammes Beviis udi begge de yderligste Tilfælde, hvoraf det eene er naar $x = y$, eller næsten saa stor som y, thi længer fordres ei Sætningens Rigtighed, da saafremt at (y) er mindre end (x) har Satsen ei Sted. Dersom da (x) var lige saa stor som (y), blev $\frac{x}{y} = 1$ altsaa Log. $\frac{x}{y} =$ Log. $1 = 0$, men $\frac{x-y}{y} = 0$, følgeligen er Log. $\frac{x}{y} = \frac{x-y}{y}$ udi Tilfælde da $x = y$ eller da der er kuns en meget liden Forskiel imellem Størrelsen af x og y. Udi det andet yderlige Tilfælde naar $y = nx$ og (n) er overmaade stor, da, som det af Analysis er bekiendt, at naar (e) er det Tal, hvis hyperbolske Logaritme $= 1$, og ∞ er det Tegn, hvormed en uendelig stor Størrelse bemerkes, er $e^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty}$, altsaa, da $-1 + \frac{1}{\infty}$ er endnu mindre end $\frac{1}{\infty}$, maae samme Sætning gielde, og paa lige Maade blir $e^{-1+\frac{1}{\infty}} = 1 - 1 + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, men da $n = \infty$ og $y = nx = \infty x$, blir $\frac{x}{y} = \frac{x}{\infty x} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$ altsaa blir $e^{-1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ og $-1 + \frac{1}{n} =$ Log. $\frac{1}{n} =$ Log. $\frac{x}{y}$, da $\frac{1}{n} = \frac{x}{y}$, blir $-1 + \frac{x}{y} =$ Log. $\frac{x}{y}$, og $\frac{x-y}{y} =$ Log. $\frac{x}{y}$, hvorved forstaaes den hyperbolske Logaritme, sættes Subtangenten til det briggiske Logaritme Systema $= p$, blir den briggiske Logaritme af $\frac{x}{y} = \frac{p(x-y)}{y} = \frac{0.434294(x-y)}{y}$, og paa slig Maade er Sætningen beviist udi de yderligste Tilfælde, hvoraf det første er egentligen allene det hvori Sætningen bør bruges, naar man vil undgaae 10de til 100de Dele Brøks Feil ved Exponential-Ligningers Opløsning.

§. 37.

Eftersom at Log. $\frac{x}{y} = \frac{0.434294}{y} \times (x-y)$ (§. 36) kan man og bestemme Logaritmen af $(b-x) =$ Log. $((b) \times (1 - \frac{x}{b})) =$ Log. b $+$ Log. $(1 - \frac{x}{b})$ men $1 - \frac{x}{b} = \frac{b-x}{b}$ og $b - x$ er mindre end (b), altsaa i Følge (§. 36.) Log. $\frac{b-x}{b} = \frac{b-x-b}{b} = \frac{-x}{b} \times 0.434294$, følgeligen Log. $(b-x) =$ Log. $b - \frac{0.434294\,x}{b}$, naar $b > x$ og x liden i Forhold til (b).

Exempel.

Exempel.

Sæt $b = 1000$, $x = 2$, saa er Log. $(b - x) = 3.000000 - 0.000868 = 2.999132 =$ Log. 998.

§. 38.

Paa den Maade kan man ei bestemme Log. $(b + x) =$ Log. $b +$ Log. $(1 + \frac{x}{b})$, saasom $1 + \frac{x}{b} = \frac{b + x}{b}$ er større end en heel, og $b + x$ større end (b), men paa følgende Maade lader sig Log. $(b + x)$ bestemme ved Nærmelse eller Approximation. Man bestemmer Log. $(1 + \frac{x}{b})$ ved følgende Proportion, som er almindelig ved Logaritmers Brug, omendskiønt kuns paa Brøk nær rigtig, at $1 : 0.301030 = \frac{x}{b} : \frac{0.301030x}{b}$, altsaa Log. $1 + \frac{x}{b} = 0 + \frac{0.301030x}{b} = \frac{0.301030x}{b}$, og Log. $(b + x) =$ Log. $(b) + \frac{0.301030x}{b}$. Man kan og bestemme Log. $(b + x)$ paa følgende Maade, da (b) er en bekiendt Størrelse, opsøges i Logaritme-Tavlerne Logaritme-Differencen imellem Log. b og Log $(b + 1)$, hvilken Forskiel jeg kalder (m), da blir $1 : m = x : mx$ efter den Proportionalitet, som er almindelig ved Logaritmers Brug, og uden betydelig Brøks Feil kan anvendes, naar (b) er meget større end (x), samt (x) ei er meget stor, da man faaer Log. $(b \pm x) =$ Log. $(b) \pm mx$.

§. 39.

Ved Hielp af anførte bestemmes Log. x. Sæt Grændse-Størrelsen for x er (b), saa at $x = b - u$, da er i Følge (§. 37.) Log. $(b - u) =$ Log. $b - \frac{0.434294u}{b}$ altsaa da $u = b - x$ blir Log. $(b - u) =$ Log. $b + \frac{(x - b) \times 0.434294}{b}$, og følgeligen Log. $x =$ Log. $b + \frac{0.434294\,(x-b)}{b}$. Man kan og bestemme (Log. x) paa følgende Maade: sæt (a) er en Grændsestørrelse for (x) som er tillige mindre end (x), saa at $x = a + u$, da blir i Følge §. 38. $Log.\ x = Log.\ (a + u) = Log.\ a + \frac{0.301030u}{a}$, men da $x - a = u$, blir $Log.\ x = Log.\ a + \frac{0.301030(x - a)}{a}$. Naar (u) er meget mindre end (a) kan man og bestemme $Log.\ x$ paa følgende Maade: da $Log.\ (a + u)$ i Følge §. 38. er $= Log.\ a + mu$, men $u = x - a$, blir $Log.\ x = Log.\ a + mx - am$.

§. 40.

Ligeledes kan man forvandle den logaritmiske Funktion xlx til naturlige Tals Funktion paa en nærmende Maade, thi, da $Log.\ x = lb + \frac{(x - b) \times 0.434294}{b}$ (§ 39), blir $xlx = xlb + \frac{0.434294(x^2 - bx)}{b}$. Da (b) er en valgt Grændsestørrelse for (x) der er lidet større end (x). Naar (a) antages som en Grændsestørrelse, der er lidet mindre end (x) blir $lx = la + \frac{0.301030(x - a)}{a}$ altsaa $xlx = xla + \frac{0.301030(x^2 - ax)}{a}$. Eller og, naar den logaritmiske Forskiel imellem $Log.\ (b + 1)$ og $Log.\ b$ udi Logaritme-Tavlen ansættes $= m$, blir, naar (b) er mindre end (x) den logaritmiske Funktion $xlx = xlb + mx^2 - bmx$ i Følge (§ 39).

§. 41.

I Følge anførte blir $\frac{Log.\ x}{x} = \frac{lb}{x} + 0.434294\,\frac{(x - b)}{bx}$, naar $b > x$ samt $\frac{Log.\ x}{x} = \frac{la}{x} + 0.301030\,\frac{(x - a)}{ax}$, naar $a < x$ eller og $\frac{lx}{x} = m + \frac{lb - bm}{x}$, naar man benytter sig af den logaritmiske Differenee, og b er mindre end x.

§. 42.

Da $Log.\ \frac{x}{y} = \frac{x - y}{y}$ § 36, saa er den hyperbolske Logaritme af $\frac{x}{x+1} = \frac{x - x - 1}{x + 1} = \frac{-1}{x+1}$ og den briggiske Logaritme af $\frac{x}{x+1} = -\frac{0.434294}{x+1}$.

§. 43.

§. 43.

Paa en anden Maade kan man bestemme den hyperbolske Logaritme af $\frac{x+a}{x}$ efter Saundersons Methode; da Log. hyp. $\frac{x+a}{x} = \frac{2a}{2x+a}$, naar (x) ei er over 10000, og (a) ei større end en Heel. Satsen er egentligen kuns en Nærmelses-Sætning, og bevises paa følgende Maade af Differential-Regningen. Sæt Summen af Tæller og Nævner eller $2x + a = m$, deres Forskiel $= a$, da blir $\frac{\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}a} = \frac{m+a}{m-a}$. Dersom nu Forskiellen imellem Tæller og Nævner $= a$ ansees som en foranderlig Størrelse, blir Differentialet af $\frac{m+a}{m-a} = \frac{2mda}{m^2-a^2}$, saasom Differentialet af Log. $(m+a) = \frac{da}{m+a}$ og Differentialet af Log. $(m-a) = \frac{-da}{m-a}$, altsaa Differentialet af Log. $\left(\frac{m+a}{m-a}\right) = \frac{da}{m+a} + \frac{da}{m-a} = \frac{mda - ada + mda + ada}{m^2-a^2} = \frac{2mda}{m^2-a^2}$, forvandles det ved Division til en uendelig Rad og integreres, blir Log. $\left(\frac{m+a}{m-a}\right) = 2 \times \left(\frac{a}{m} + \frac{a^3}{3m^3} + \frac{a^5}{5m^5} + \frac{a^7}{7m^7}\ \text{&c.}\right)$, men da (a) ei er større end en Heel og (m) ei større end 10000, maae man uden Feil kunde udelade de Brøk $\frac{a^3}{3m^3}$, $\frac{a^5}{5m^5}$ &c. som forsvindende Størrelser, altsaa antage Log. $\left(\frac{m+a}{m-a}\right) = \frac{2a}{m}$, naar der forstaaes den hyperbolske Logaritme, da nu $m = 2x + a$ er Log. $\left(\frac{m+a}{m-a}\right) =$ Log. $\left(\frac{2x+a+a}{2x+a-a}\right) =$ Log. $\left(\frac{2x+2a}{2x}\right) =$ Log. $\left(\frac{x+a}{x}\right) = \frac{2a}{m} = \frac{2a}{2x+a}$, er da $(a) = 1$, blir Log. $\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2}{2x+1}$; naar man vil forvandle den hyperbolske Logaritme til Briggisk Logaritme, da blir den Brigg. Log. $\frac{x+a}{x} = \frac{2(0.434294)a}{2x+a} = \frac{0.868588a}{2x+a}$, og den Brigg. Log. $\frac{x+1}{x} = \frac{0.868588}{2x+1}$. Deraf følger, at saafremt (a) ei overgaaer en Heel, og (x) ei er større end 10000, blir Log. $(x+a)$ — Log. $x = 0.868588a : (2x+a)$. Men denne Formel kan ei tiene til at omvexle en logaritmisk Funktion til en naturlig Tal-Funktion, med mindre man veed den ubestemte Størrelses Grændse-Værdi paa en Brøk nær. Naar man f. E. veed at (x) mangler kuns en Brøk i at være $= b$, da kan man antage $x = b + \frac{b}{u}$, og altsaa Log. $x = l(b + \frac{b}{u}) =$ Log. $b +$ Log. $(1 + \frac{1}{u})$, men

Loga-

Logaritmen af $(1+\frac{1}{u}) = \text{Log.}\,\frac{u+1}{u} = \frac{0.868588}{2u+1}$, altsaa Log. $x =$ Log. $b + \frac{0.868588}{2u+1}$, men, da $x = b + \frac{b}{u}$, bliver $xu = bu + b$, og $(x-b)u = b$, altsaa $u = \frac{b}{x-b}$, følgeligen ved Omsætning Log. $x =$ Log. $b + \frac{0.868588}{\frac{2b}{x-b}+1}$, og Log. $x =$ Log. $b + \frac{(0.868588)(x-b)}{x+b}$. Men udi Tilfælde da $x = b + \frac{b}{u}$, og $\frac{b}{u}$ er mindre end en Heel, kan man langt lettere og sikrere benytte sig af den logaritmiske Forskiel efter den (§ 39) forklarte Methode, da, naar den logaritmiske Forskiel imellem Log. $(b+1)$ og Log. b er $= m$, bliver $1 : m = \frac{b}{u} : \frac{bm}{u}$, og, da $x = b + \frac{b}{u}$, bliver $xu = bu + b$, og $xu - bu = b$, samt $u = \frac{b}{x-b}$, altsaa $1 : m = \frac{b}{u} : m(x-b)$, og Log. $(b + \frac{b}{u})$ $=$ Log. $x =$ Log. $b + mx - bm$; der vil befindes langt nøiagtigere end den efter Saundersons Maade bestemte Værdie af Log. $x =$ Log. $b + \frac{(0.868588)(x-b)}{x+b}$.

§. 44.

Skiønt jeg forhen (§ 9) har bestemt en Maade, uden Approximation at finde den ubestemte Størrelse udi Exponential-Ligningen $a^x \pm b^x = c$, kan det dog i mange Tilfælde være til Lettelse i Opløsningen at benytte sig af følgende Approximations-Methode, som jeg har befunden at bestemme Værdien af Exponenten paa Tiendeels Brøk nær. Da $a^x + b^x = c$ bliver, naar $a^x = u$, $b^x = v$, $u + v = c$, da $xla = lu$, og $xlb = lv$, samt $lu : lv = xla : xlb = la : lb$, men $v = c - u$ og $u = c - v$ altsaa bliver $lu : lv = la : lb =$ Log. $(c - v)$: Log. $(c - u)$, men Log. $(c - v) =$ Log. $c - \frac{0.434294v}{c}$, og Log. $(c - u) =$ Log. $c - \frac{0.434294u}{c}$ (§ 37) altsaa $la : lb =$ Log. $c - \frac{0.434294v}{c}$: Log. $c - \frac{0.434294u}{c}$, men $v = c - u$ følgeligen $la : lb = [lc + \frac{(u-c)0.434294}{c}] : [lc - \frac{u \times 0.434294}{c}]$, og naar man sætter $la : lb = m$, $\frac{0.434294}{c} = n$ bliver $m = [lc + (u-c)n] : [l(c) - nu]$, og $mlc - mnu = lc + nu - cn$, samt $mlc + cn - lc$ $=$

$= (mn + n)u$, og $\frac{mlc - lc + cn}{mn + n} = u$; da $a^x = u$, altsaa $x = \frac{lu}{la}$, blir $x = \text{Log.}\left(\frac{mlc - lc + cn}{mn + n}\right) : \text{Log. } a$.

Exempel.

Sæt $a = 5$. $b = 4$. $c = 189$, saa er $m = \frac{la}{lb} = \frac{69897}{60206}$, $n = \frac{0.434294}{189} = 0.002297$. $mlc = 2.642896$, $lc = 2.276462$. $cn = 0.434294$. $mn = 0.002666$, og $mn + n = 0.004963$, og $mlc - lc + cn = 0.800728$; altsaa $u = \frac{0.800728}{0.004963}$, og $x =$ Log. u : Log. $a = \text{Log.}\left(\frac{0.800728}{0.004963}\right) : 0.698970$; altsaa $x = 3.1$.

§. 45.

Ved Hielp af foranførte Sætninger er man i Stand til at bestemme Værdien af den ubestemte Størrelse udi det slags Exponential-Ligning, som indbefatter en Blanding af Exponential-Størrelse samt af ubestemt Størrelse med bestemt Exponent. Det simpleste Tilfælde er $a^x \pm x = b$, da $a^x = b - x$, og $xla = \text{Log.}(b - x)$; men Log. $(b - x) = lb - \frac{0.434294x}{b}$ i Følge § 37, altsaa $xla = lb - \frac{0.434294x}{b}$, og $bxla = blb - 0.434294x$, samt $bxla + 0.434294x = blb$, og $(bla + 0.434294)x = blb$, altsaa $x = \frac{blb}{bla + 0.434294}$.

Exempel.

Sæt $a = 3$, $b = 248$, da blir $x = 5\frac{4}{478}$ bestemt paa $\frac{1}{119}$ Deel nær.

§. 46.

Da $b - x^m = b\left(1 - \frac{x^m}{b}\right)$, altsaa Log. $(b - x^m) = \text{Log.}\, b +$ Log. $\left(1 - \frac{x^m}{b}\right)$, men, naar (b) er større end x^m, saa er i Følge (§ 36) Log. $\left(1 - \frac{x^m}{b}\right) = \text{Log.}\left(\frac{b - x^m}{b}\right) = -\frac{x^m}{b}$, naar forstaaes hyperbolsk Logaritme, og $= \frac{-x^m}{b} \times 0.434294$, naar forstaaes Briggisk Logaritme, hvoraf følger, at den Briggiske Logaritme til $(b - x^m) = \text{Log. } b - \frac{x^m}{b} \times 0.434294$.

§. 47.

Exponential-Ligningen $x^m \pm Aa^x = b$ opløses paa følgende Maade, da man faaer $Aa^x = b - x^m$ og $lA + xla = l(b - x^m)$ men $l(b - x^m) = lb - \frac{0.434294 x^m}{b}$, altsaa faaes $lA + xla = lb - \frac{0.434294 x^m}{b}$, og deraf følger, at $\frac{x^m}{b} \times 0.434294 + xla = lb - lA$, samt $0.434294 x^m + bxla = blb - blA$ og $x^m + \frac{bla}{0.434294} x = \frac{blb - blA}{0.434294}$, som er en Ligning med bestemte Exponenter, og kan opløses efter en af de (§ 4) anførte Maader.

Exempel.

Sæt $m = 2$. $a = 4$. $b = 73$. $A = 1$. da blir $x^2 + \frac{43950380}{434294} x = \frac{136022579}{434294}$, hvoraf man bestemmer $x = -50.5998 \pm 53.605 = +3.0052$, som er den sande Bestemmelse af (x) paa $\frac{52}{10000}$ nær.

Anmerkning.

Da Exponential-Ligninger ei kan opløses uden Hielp af Logaritmer, og Logaritmer selv ere bestemte ved Nærmelses-Methode ei uden Brøks Feil, der forøges ved deres Multiplication med Logaritmen eller naturlige Tal, kan man umueligen bestemme den ubestemte Størrelse udi Exponential-Ligninger nærmere end paa Brøk nær, som udi de fleste Tilfælde i Praxi er alt det der behøves.

§. 48.

Dersom Exponential-Størrelsen udi Exponential-Ligninger har ei allene en ubestemt Exponent, men tillige en ubestemt Rodstørrelse, saa at Exponential-Ligningen er af den Form, $x^x = a$, blir Opløsningen følgende:

Første Opløsning.

Da $x^x = a$, blir $xlx = la$, antages en Grændse-Værdie (m), som er større end (x), da blir efter (§ 39) $\text{Log. } x = \text{Log. } m + \frac{(x - m) \times 0.434294}{m}$, altsaa $xlm + \frac{(x^2 - mx) \times 0.434294}{m} = la$, og $mxlm + (x^2 - mx) \times 0.434294 = mla$, samt $0.434294 x^2 + mlmx$

—

$- 0.434294mx = mla$, og $x^2 + \left(\frac{mlm - 0.434294m}{0.434294}\right) x = \frac{mla}{0.434294}$, samt $x = -\left(\frac{mlm - 0.434294m}{0.868588}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{mla}{0.434294} + \frac{(mlm - 0.434294m)^2}{(0.868588)^2}\right]}$.

Anden Opløsning.

Dersom man vælger en Grændse-Værdie, som er mindre end (x), og sætter samme $= n$, da blir efter (§ 39) Log. $x = ln + \frac{0.301030x}{n} - \frac{0.301030n}{n}$, men da $x^x = a$, og $xlx = la$, blir $xlx = xln + \frac{0.301030x^2}{n} - 0.301030x = la$, og $nxln + 0.301030x^2 - 0.301030nx = nla$, samt ved Division $x^2 + \left(\frac{nln}{0.301030} - n\right)x = \frac{nla}{0.301030}$, følgeligen blir $x = -\left(\frac{nln}{0.602060} - \frac{1}{2}n\right) \pm \sqrt{\frac{nla}{0.301030} + \left(\frac{nln}{0.602060} - \frac{1}{2}n\right)^2}$.

Tredie Opløsning.

Efter at have valgt en Grændse-Værdie for x saaledes, at den er lidet mindre end (x), hvilken Værdie sættes $= b$; opsøges i Logaritme-Tavlerne dens nærmeste Logaritmiske Forskiel, som sættes $= m$, da blir i Følge (§ 39) Log. $x = lb + mx - bm$, men da Ligningen, som skal opløses $x^x = a$ gir $xlx = la$, blir $xlb + mx^2 - bmx = la$, og $mx^2 + (lb - bm)x = la$, samt $x^2 + \left(\frac{lb - bm}{m}\right) x = \frac{la}{m}$. Hvoraf følger, at $x = -\left(\frac{lb - bm}{2m}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{la}{m} + \left(\frac{lb - bm}{2m}\right)^2\right]}$.

Exempel til første Opløsning.

Sæt $a = 3125$. $m = 6$. altsaa $la = 3.494850$; $lm = 0.778151$; samt $\frac{mlm - 0.434294m}{0.434294} = \frac{4668906}{434294} - 6 = 10.7505 - 6 = 4.7505$, og $\frac{mla}{0.434294} = \frac{20969100}{434294} = 48.2831$ følgeligen $x^2 + 4.7505x = 48.2831$, og $x = -2.3752 \pm \sqrt{(48.2831 + 5.6415)} = -2.3752 \pm 7.34$, altsaa $x = 4.9648$, som paa den Brøk $\frac{352}{10000}$ nær er rigtig.

Exempel til anden Opløsning.

Sæt som forhen $a = 3125$, men $n = 4$; da blir $ln = 0.602060$, og $\frac{nln}{0.301030} - n = \frac{2408240}{301030} - 4 = 7.7999 - 4 = 3.9999$, og da $la = 3.494850$, blir $\frac{nla}{0.301030} = \frac{1397940 0}{301030} = 46.4385$, altsaa blir $x = -1.9999 \pm \sqrt{(46.4385 + 3.9996)} = -1.9999 \pm \sqrt{50.4381}$, altsaa $x = -1.9999 \pm 7.1010 = 5.1011$.

Exempel til tredie Oplosning.

Som forhen sættes $a = 3125$, $b = 4$. Den logaritmiske Forskiel imellem Log. $(b + 1)$ og Log. $b = m = 0.096910$, da $lb = 0.602060$, $bm = 0.387640$, blir $\frac{lb - bm}{2m} = \frac{0.602060 - 0.387640}{0.193820} = 1.1062$, og $\frac{la}{m} = \frac{3.494850}{0.096910} = 36.0628$, følgeligen $x = -1.1062 \pm \sqrt{(37.2864)} = -1.1062 \pm 6.1062$, altsaa $x = 5$, ved hvilken Oplosningsmaade Værdien af (x) bestemmes uden Brøks Feil.

§. 49.

Saafremt den ubestemte Exponent i Exponential-Ligningen er en ubestemt Logaritme af den ubestemte Rodstørrelse under den Form $x^{lx} = a$, blir Ligningen langt lettere at opløse, da blir $lx \cdot lx = la$, altsaa $(lx)^2 = la$, og $lx = \sqrt{la}$.

Exempel.

Sæt $a = 10000$, saa er $la = 4$, altsaa $lx = \sqrt{la} = 2$, og $x = 100$, da man og rigtigen befinder $100^2 = 10000$, eller $x^{lx} = a$.

§. 50.

Exponential-Ligningen $x^x + x^n = a$ opløses paa følgende Maade:

Forste Oplosning.

Da $x^x + x^n = a$, blir $x^x = a - x^n$, og $xlx = \text{Log.}(a - x^n)$, men $lx = lb + mx - bm$ (§ 39), naar (b) er en Grændsestørrelse lidet mindre end (x), samt (m) den logaritmiske Forskiel imellem Log. $(b + 1)$ og Log. b. Log. $(a - x^n) = la - \frac{0.434294x^n}{a}$, naar x^n er enten nær ved at være saa stor som (a) eller og overmaade liden i Forhold til (a). Da $xlx = l(a - x^n)$, men $xlx = xlb + mx^2 - bmx$, og $l(a - x^n) = la - \frac{0.434294x^n}{a}$, saa er $xlb + mx^2 - bmx = la - \frac{0.434294x^n}{a}$, og føl-

følgeligen $\frac{0.434294x^n}{a} + (lb - bm)x + mx^2 = la$ samt $x^n + \frac{am}{0.434294}x^2 + \left(\frac{alb - abm}{0.434294}\right)x = \frac{ala}{0.434294}$; hvilken Ligning bestaaer af bekiendte Exponenter, og maae opløses efter Methoden (§ 4).

Anden Opløsning.

Ligningen $x^x + x^n = a$ kan lettere opløses paa følgende Maade: da $x^x = a - x^n$ altsaa $xlx = l(a - x^n)$ men $lx = lb + mx - bm$, altsaa $xlx = xlb + mx^2 - bmx$, følgeligen, da $xlx = l(a - x^n)$, blir $xlb + mx^2 - bmx = l(a - x^n)$, og da (b) er en antagen Grændseværdie af (x) vil det ei have betydelig feilagtig Følge, at antage Log. $(a - x^n)$ = Log. $(a - b^n)$, da blir $xlb + mx^2 - bmx = l\overline{(a - b^n)} = ls$ og $x^2 + \left(\frac{lb - bm}{m}\right)x = \frac{ls}{m}$ samt $x = -\left(\frac{lb - bm}{m}\right) \pm \sqrt{\frac{ls}{m} + \left(\frac{lb - bm}{2m}\right)^2}$.

Exempel.

Sæt $b = 2$. $a = 36$. $n = 2$, altsaa $lb = 0.301030$, $s = a - b^n = 36 - 4 = 32$, $\frac{lb - bm}{m} = \frac{0.301030 - 0.352182}{0.176091}$, naar $m = 0.176091$, altsaa $\frac{lb - bm}{m} = -\frac{51152}{176091}$, og $ls = l32 = 1.505150$, altsaa $x^2 - \frac{51152}{176091}x = \frac{1.505150}{1.176091}$, og $x = +\frac{25576}{176091} \pm \sqrt{\left(\frac{1505150}{176091} + \frac{(25576)^2}{(176091)^2}\right)} = 0.1452 \pm \sqrt{8.5685}$, altsaa $x = 3.0652$. Ved at igientage denne Beregningsmaade, antage $l(a - b^n) = l\overline{(36 - (3.0652)^n)}$ vil man endnu langt nærmere kunde bestemme Værdien af (x) udi Exponential-Ligningen $x^x + x^n = a$.

§. 51.

Det besynderlige slags Ligninger, som og kan henregnes blant Exponential-Ligninger, er man i Stand til opløse under den Form $xlx = ax + n$, antages en Grændseværdie af (x) som sættes $= m$, der er lidet mindre end (x) og ved Hielp af Logaritme-Tavlerne letteligen kan vælges. Den logaritmiske Forskiel imellem $l(m + 1)$ og $l(m)$ sættes $= r$, der ligeledes af Logaritme-Tavlerne er bekiendt, da blir i Følge § 39 $lx = lm + rx - mr$,

 altsaa

altsaa, da $xlx = ax + n$, blir $xlm + rx^2 - mrx = ax + n$, og $rx^2 + (lm - mr - a)x - n = 0$, eller $x^2 + \left(\frac{lm - mr - a}{r}\right)x - \frac{n}{r} = 0$, altsaa $x = -\left(\frac{lm - mr - a}{2r}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{n}{r} + \frac{(lm - mr - a)^2}{4r^2}\right)}$.

Exempel.

Sæt $m = 7$, $n = 7$, $a = 1$, tages da de hyperbolske Logaritmer (nemligen i Tilfælde naar den logaritmiske Ligning er fremkommen ved Differential-Lignings Integration) saa er $lm = 1.9459101$, $r = 0.1335314$, $lm - mr - a = 1.9459101 - 0.9347198 - 1.0000000 = 0.0111903$, og $\frac{lm - mr - a}{r} = 0.0838$, samt $\frac{n}{r} = 52.4221$, altsaa $x = -0.0419 \pm 7.24 = 7.1981$. Som svarer langt nøiere til Ligningen $xlx = ax + n$, end den af Euler ved Regula Falsi bestemte Værdie 7.21 udi Ligningen $lu = 1 + \frac{7}{u}$, hvor u bemerker det samme som x, og $a = 1$, $n = 7$. Dersom man havde antagen en Grændsestørrelse, som var alt for meget afvigende fra den ubestemte Størrelses sande Værdie, maatte man ved Hielp af den befundne Værdie igientage samme Beregningsmaade, hvorved man blir i Stand til at bestemme Værdien af den ubestemte Størrelse paa den allermindste Brøk nær.

Anmerkning.

Euler melder om deslige Ligninger udi Neue Grundsätze der Artillerie: Aus dieser Aequation kan zwar überhaupt der Werth von (u) nicht angezeigt werden.

§. 52.

Da en stor Deel af foranførte Opløsningsmaader grundes paa den forudsatte Opløsning af Ligningen $x^n + x = b$, maae jeg til Slutning undersøge, om man ei ved en kortere Approximations-Maade kan bestemme Rodstørrelsen (x), uden at benytte sig af nogen af de Maader, som ere forklarte (§ 4) der i mange Tilfælder vil ikke uden stor Vidtløftighed kunde bruges. Da $x^n + x = b$, blir $nlx = l(b - x)$, sættes den logaritmiske Forskiel

imellem

imellem $l(b)$ og $l(b-1) = r$, da er $1 : r = x : rx$, altsaa $l(b-x) = lb - rx$ i Følge § 38, og $lx = \frac{l(b-x)}{n} = \frac{lb - rx}{n}$, sættes $x = b^{\frac{1}{n}} - u$, og den logaritmiske Forskiel imellem $l(b^{\frac{1}{n}})$ eller $\frac{lb}{n}$ og $l(b^{\frac{1}{n}} - 1)$ sættes $= s$, da blir $lx = lb^{\frac{1}{n}} - us = \frac{lb}{n} - us$, men $x = b^{\frac{1}{n}} - u$, altsaa $u = b^{\frac{1}{n}} - x$, følgeligen ved Omsætning blir $lx = \frac{lb}{n} - sb^{\frac{1}{n}} + sx$, og, da $lx = \frac{lb - rx}{n}$, som forhen er viist, blir $\frac{lb - rx}{n} = \frac{lb}{n} - sb^{\frac{1}{n}} + sx$, og deraf følger, at $lb - rx = lb - nsb^{\frac{1}{n}} + nsx$, og $lb = lb - nsb^{\frac{1}{n}} + rx + nsx$, samt $nsb^{\frac{1}{n}} = rx + nsx$, og $\frac{nsb^{\frac{1}{n}}}{r + ns} = x$. Dersom man til Lettelse i Beregningen vil benytte sig af Logaritmer, da blir $lx = ln + ls + \frac{lb}{n} - l(r + ns)$.

Exempel.

Sæt $n = 3$. $b = 30$; saa er $lb = 1.477121$, $\frac{lb}{n} = 0.492373$, $s = 0.176091$, $r = 0.014723$, $ln = 0.477121$, $r + ns = 0.542996$, $lr + ns = -0.265200$, og $lx = 0.477121 - 0.754241 + 0.492373 + 0.265200 = 0.480453$, altsaa $x = 3.023$.

Ved at igientage den samme Beregningsmaade sættes $x = 3.023 - u$ i Stedet for man forhen satte $x = b^{\frac{1}{n}} - u$, skal man endnu paa en mindre Brøk nær kunde bestemme Værdien af (x). Man kan og dertil anvende den § 4 n. 2 forklarte Methode, da, naar den befundne Værdie af (x) nemlig 3.023 sættes $= c$, og antages $x = c - z$, da blir $(c - z)^n + c - z = b$, og $(c - z)^n - z = b - c = d$, samt $(c - z)^n = d + z$, og $n(\text{Log. } \overline{c - z}) = \text{Log. } (d + z)$, sæt $lc - l\overline{c - 1} = p$, $l\overline{d + 1} - ld$

$-ld = q$, saa er $1 : p = -z : -pz$, $1 : q = z : qz$, og altsaa $nl(c-z) = n(l(c) - pz)$, samt $l(d+z) = ld + qz$ i Følge (§ 38), altsaa, da n Log. $\overline{c-z}$ = Log. $\overline{d+z}$, blir $nlc - npz = ld + qz$, og $nlc - ld = npz + qz$, samt $\frac{nlc - ld}{np + q} = z$.

Exempel.

$c = 3.02$, som forhen blev bestemt, $b = 30$, $b - c = 26.98 = d$, $n = 3$, som forhen, $p = lc - l\overline{c-1} = 0.174656$; $q = l\overline{d+1} - ld = 0.015806$, altsaa $x = \frac{nlc - ld}{np + q} = \frac{1.440021 - 1.431042}{0.523968 + 0.015806} = \frac{0.008979}{0.539774} = 0.01663$, altsaa $x = 3.02 - 0.01663$, og $x = 3.00337$, som paa $\frac{3}{1000}$ Deel nær er rigtig. Vil man endnu nærmere bestemme Værdien af (x), kan samme Beregningsmaade uden stor Vanskelighed igientages, da Tal-Opløsningen er ved Hielp af Logaritmen meget let.

Skulde man befinde nogen af foranførte Exponential-Ligninger ved Opløsningen at endes med slig en Ligning $x^{\sqrt{m}} + x = b$, hvilket slags af Leibnitz er kaldet Æquatio interscendens, som jeg ei har seet opløst i noget mathematisk Skrift, kan samme opløses ved Hielp af anførte Maade, hvorefter Ligningen $x^n + x = b$ er bleven opløst, som gav $x = \frac{nsb^{\frac{1}{n}}}{r + ns}$, da istedet for (n) sættes $\sqrt{m}$, hvorved man faaer $x = \frac{b^{\frac{1}{\sqrt{m}}} s . \sqrt{m}}{r + s\sqrt{m}}$, der er Rodstørrelsen udi Ligningen $x^{\sqrt{m}} + x = b$, saafremt $\sqrt{m} > 1$. Da man faaer $lx = \frac{lb}{\sqrt{m}} + ls + \frac{lm}{2} -$ Log. $(r + s\sqrt{m})$.